

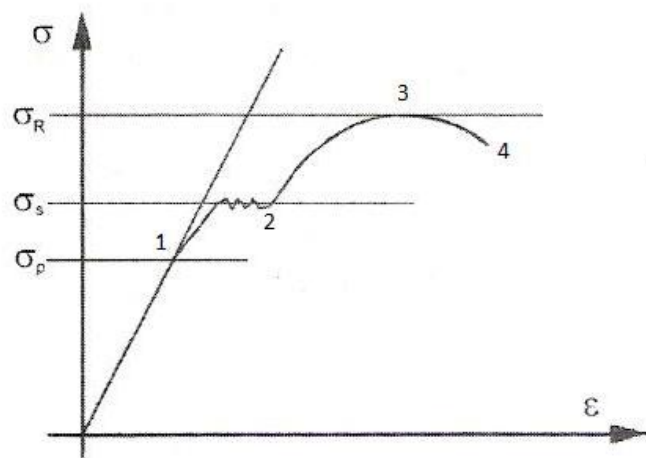
Parte 1 Stati di sollecitazione e criteri di resistenza

1.1 Legge tensione-deformazione.

Nella progettazione aeronautica, come in qualunque altra progettazione, si deve garantire che le caratteristiche del materiale siano adeguate alla struttura da realizzare.

Sottoponendo un provino di un determinato materiale ad una prova di trazione e definendo la tensione σ (sollecitazione) come il rapporto tra il carico applicato e la superficie su cui esso agisce, e la deformazione ε ,

il rapporto tra variazione di lunghezza Δl e la lunghezza iniziale del corpo l_0 , possiamo studiare il comportamento del materiale, sottoposto allo sforzo di trazione assiale, tracciando il diagramma tensione-deformazione ($\sigma - \varepsilon$). Riportando le tensioni σ sulle ordinate ed i corrispondenti allungamenti ε sulle ascisse si ottiene una curva, nella quale si evidenziano tre diversi stati fondamentali attraverso il quale è passato il materiale durante la prova:



➤ Tratto 0-1 (fase elastica): in questo tratto il materiale, si comporta elasticamente, ovvero è in grado di riassumere la lunghezza iniziale se il carico esterno cessa di agire. In tale fase vale la **legge di Hooke**:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon = E \cdot \frac{\Delta l}{l_0} \quad \text{dove } E \text{ è una costante, caratteristica del materiale, detta Modulo di elasticità normale}$$

e quindi esiste una proporzionalità diretta tra tensione e deformazione. Il punto 1 sul diagramma, in corrispondenza del quale la curva tensione-deformazione devia dall'andamento lineare della legge di Hooke e diventa non lineare, corrisponde al limite di comportamento elastico e il corrispondente valore σ_p è detto **tensione limite di proporzionalità**;

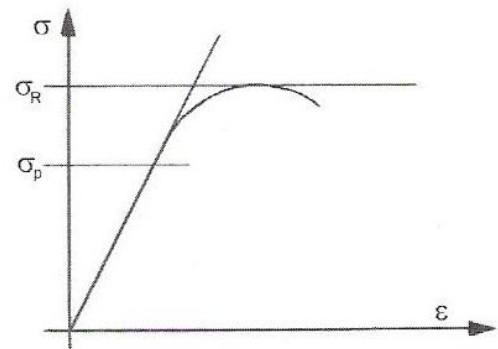
➤ Tratto 1-2 (fase di snervamento): in questa fase il materiale, si comporta in maniera incostante, ovvero alterna momenti di cedimento a momenti di ripresa di resistenza. Al punto 2, in corrispondenza del quale il materiale inizia a deformarsi plasticamente, passando da un comportamento elastico reversibile ad un comportamento plastico caratterizzato dallo sviluppo di deformazioni irreversibili che non rientrano al venir

meno della causa sollecitante, corrispondente una tensione σ_s detta **tensione di snervamento**.

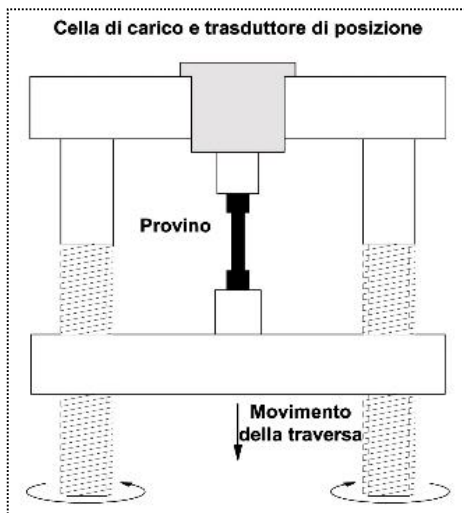
Alcuni metalli duttili, come l'acciaio dolce, presentano in realtà, due punti di snervamento. Il loro comportamento è sostanzialmente lineare fino al raggiungimento del punto di snervamento superiore. Successivamente evidenziano un rapido salto ad un valore inferiore di tensione, il punto di snervamento inferiore che in ingegneria strutturale è assunto come valore conservativo di riferimento. Per i materiali non duttili e non ferrosi, la tensione di snervamento è definita come il valore della tensione associata ad una deformazione plastica irreversibile del 0,2%, ricavata dalla curva tensione-deformazione relativa ad una prova di trazione su un provino di materiale di forma normata;

➤ Tratto 2-3-4 (fase plastica): in questo tratto il materiale, che ha del tutto perso le sue caratteristiche elastiche, comincia a cedere, cioè subisce forti allungamenti in corrispondenza di piccoli incrementi di carico. In corrispondenza del punto 3 il materiale cede definitivamente ed il valore della tensione corrispondente σ_R , (valore massimo del carico), viene definito carico di rottura.

I materiali che presentano un diagramma $\sigma - \epsilon$ come quello riportato nella pagina precedente (es. l'acciaio) presentano delle caratteristiche plastiche molto marcate, e quindi danno ampie garanzie dal punto di vista della resistenza strutturale, altri materiali (es. il legno), come si osserva dal grafico a lato, non presentano il tratto delle grandi deformazioni e danno luogo ad una rottura di tipo fragile.



Di seguito sono rappresentati lo schema e la foto di una macchina per la prova di trazione.



Secondo quanto affermato in precedenza il dimensionamento e la scelta del materiale andrebbero fatti considerando il valore della corrispondente tensione di rottura σ_R (valore massimo del carico), in realtà, al fine di assicurare la stabilità alla struttura e per motivi di sicurezza, è necessario che le tensioni indotte nel pezzo non si avvicinino mai a tale limite. Per tal motivo si definisce un valore limite (che non deve essere superato) inferiore a quello di rottura, definito come **tensione massima ammissibile** σ_{amm} dato da:

$$\sigma_{amm} = \frac{\sigma_R}{k}$$

dove k è un coefficiente maggiore di 1, detto coefficiente di sicurezza il cui valore dipende dal materiale e dal tipo di sollecitazione. In particolare per le strutture aeronautiche il valore di $k=1,5 \div 2$ (le normative JAR-VLA impongono, ad es., $k=1,5$).

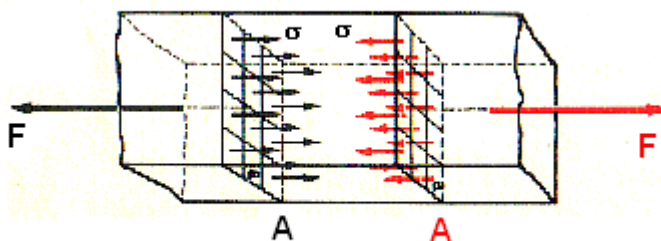
Analogamente, tutte le considerazioni finora fatte per la prova di trazione (carico esterno assiale) valgono nel il caso in cui le forze esterne agiscono perpendicolarmente all'asse del provino. In tal caso abbiamo la sollecitazione di taglio che provoca, anziché un allungamento, uno scorrimento tra due superfici adiacenti. Le tensioni interne indotte, che si oppongono allo scorrimento, sono dette tensioni tangenziali τ .

Anche per le tensioni tangenziali τ , analogamente a quanto fatto con le σ , si definisce una tensione tangenziale di rottura ed una tensione tangenziale ammissibile τ_{amm} . In particolare, per le costruzioni aeronautiche generalmente si impone che $\tau_{amm} = 0,58 \sigma_{amm}$

1.2 Trazione e Compressione.

La trazione è uno delle sollecitazioni semplici cui può essere soggetto un corpo, insieme alla compressione, la flessione, il taglio e la torsione. Si può affermare che la sollecitazione di trazione si ottiene quando sul corpo agiscono due forze uguali ed opposte in verso che tendono ad allontanarsi tra di loro (sistema di forze divergenti) provocandone un allungamento.

All'interno del solido, in due sezioni sufficientemente distanti dal punto di applicazione del carico, si generano

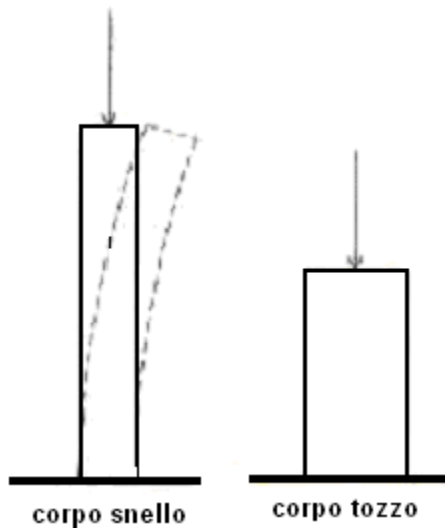


delle tensioni interne normali σ , che si oppongono all'allungamento indotto dalle forze esterne, e che sono ricavabili dal rapporto tra la forza esterna applicata e la superficie su cui essa agisce: $\sigma = \frac{F}{A}$

Nelle normali condizioni di carico la tensione di esercizio σ non deve mai superare la tensione massima ammissibile e pertanto

dovrà sempre verificata l'equazione di stabilità : $\sigma = \frac{F}{A} \leq \sigma_{amm}$

Se invece il sistema di forze esterno è convergente, ovvero sul corpo agiscono due forze uguali ed opposte in verso che tendono ad avvicinarsi tra di loro provocandone un accorciamento del corpo, la sollecitazione indotta è detta di semplice compressione e per essa valgono analoghe considerazioni per cui l'equazione di stabilità rimane formalmente la stessa (F ha ora il verso opposto).



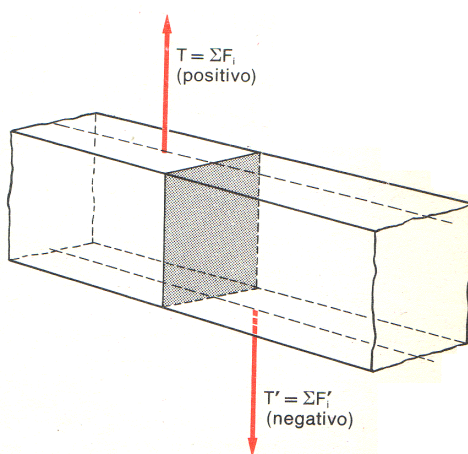
Tutto ciò è rigorosamente vero quando abbiamo a che fare con un corpo tozzo, ovvero quando la lunghezza del corpo non supera di 10 volte la minima dimensione trasversale dell'elemento per cui risulta $\frac{l}{d} \leq 10$;

Nel caso opposto ($\frac{l}{d} > 10$) ci si trova di fronte a corpi snelli che se sottoposti a carico di compressione lungo la dimensione principale sono interessati al fenomeno del carico di punta che ne compromette la resistenza a compressione anche per sollecitazioni molto minori di quelle che soddisferebbero l'equazione di stabilità $\sigma = \frac{F}{A} \leq \sigma_{amm}$.

Per tali corpi, come vedremo in un successivo paragrafo, il dimensionamento e la verifica non va fatto più a semplice compressione, ma secondo la teoria del carico di punta.

1.3 Taglio

La sollecitazione di taglio puro si ottiene quando il corpo solido viene sollecitato in una sezione da due forze uguali ed opposte, giacenti nel piano della sezione, tendenti a dividere il solido mediante scorrimento lungo la stessa sezione. Nella sezione così sollecitata si sviluppano delle tensioni interne tangenziali τ , il cui



valore medio è dato da: $\tau = \frac{T}{A}$. Nelle normali condizioni di

carico la tensione di esercizio τ non deve mai superare la tensione massima ammissibile e pertanto dovrà sempre verificata l'equazione di stabilità: $\tau = \frac{F}{A} \leq \tau_{amm} = 0,58 \cdot \sigma_{amm}$

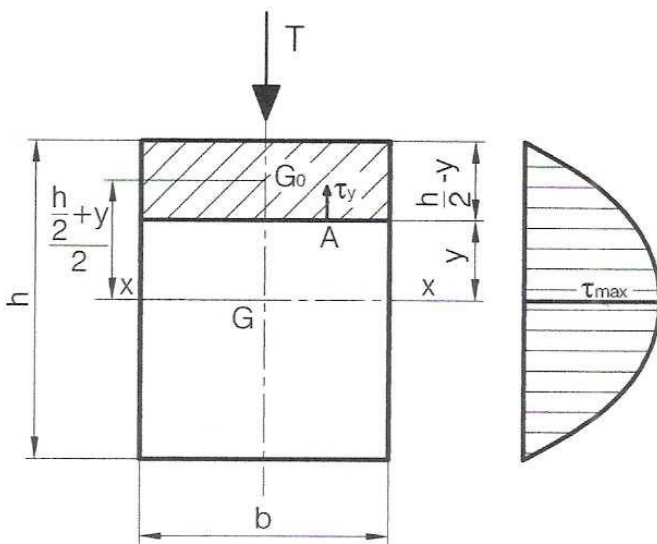
In realtà lo sforzo di taglio puro si ha solo in corrispondenza di due forze di direzione verticale uguali ed opposte aventi braccio nullo che tendono a dividere il solido mediante scorrimento lungo la stessa sezione. Nei casi pratici alla

sollecitazione di taglio è sempre collegata la sollecitazione di flessione in quanto tra le due forze esiste sempre una piccola distanza d , comunque piccola, che da luogo ad una coppia $T \cdot d$. Solo se tale momento è trascurabile, il solido può essere considerato a taglio semplice, altrimenti abbiamo una sollecitazione composta di taglio e flessione¹.

La deformazione di tipo tagliante, se non adeguatamente contrastata, tende a far assumere alla trave una forma a "Z", provocando un'alterazione locale all'asse della trave. La sezione ove è applicata l'azione tagliante è soggetta ad uno scorrimento trasversale con la formazione di tensioni tangenziali τ che si possono calcolare con la formula di Jourawsky:

$$\tau = \frac{T \cdot S}{J \cdot b} \text{ dove: } \begin{cases} T \text{ è l'azione tagliante (N)} \\ S \text{ è il momento statico dell'elemento di sezione rispetto all'asse neutro (mm}^3\text{)} \\ b \text{ è la larghezza media della sezione (mm)} \\ J \text{ è il momento d'inerzia della sezione rispetto all'asse neutro (mm}^4\text{)} \end{cases}$$

Chiaramente l'espressione di τ dipende da J e da S e quindi dalla forma della sezione. Ad esempio nel caso



della sezione rettangolare, il momento statico S (relativo alla parte di sezione tratteggiata) è:

$$S = A_s \cdot y_G = b \cdot \left(\frac{h}{2} - y\right) \cdot \left(\frac{h/2 + y}{2}\right) = \frac{b}{2} \cdot \left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)$$

mentre il momento d'inerzia rispetto all'asse x è:

$$J_x = \frac{bh^3}{12}$$

Sostituendo nell'espressione di Jourawsky si

ottiene in definitiva:
$$\tau = \frac{6T}{bh^3} \left(\frac{h^4}{4} - y^2\right)$$

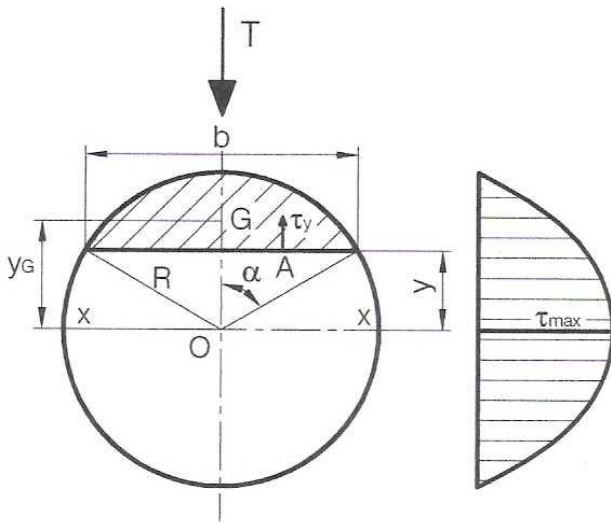
Questo significa che le tensioni tangenziali τ

variano parabolicamente lungo l'altezza y dal valore nullo in corrispondenza degli estremi ($\tau = 0$ quando $y = \pm h/2$), al valore massimo τ_{max} in mezzeria ($y = 0$) dato da:
$$\tau_{max} = \frac{3}{2} \frac{T}{bh} = \frac{3}{2} \frac{T}{A}$$

Questo significa che, in caso di sezione rettangolare, la tensione massima è 1,5 volte la tensione media ottenuta dividendo la forza di taglio per l'area della sezione.

¹ Flessione e taglio sono collegate fra loro matematicamente mediante derivata prima: $T = \frac{dM}{dz}$

In maniera analoga per determinare l'espressione delle τ nel caso di sezioni di forma circolare facciamo



riferimento alla figura sotto riportata. Il momento statico S è ora dato dall'area tratteggiata A_s (segmento circolare) per la distanza y_G del suo baricentro G dall'asse $x-x$. Poiché risulta :

$$b = 2 \cdot R \sin \alpha$$

$$y_G = \frac{2 \cdot R \sin^3 \alpha}{3 \cdot (\alpha - \sin \alpha \cos \alpha)} \text{ si ottiene}$$

$$A_s = \frac{1}{2} R^2 \cdot (2\alpha - \sin 2\alpha)$$

$$S = A_s \cdot y_G = \frac{R^3 \sin^3 \alpha \cdot (2\alpha - \sin 2\alpha)}{3 \cdot (\alpha - \sin \alpha \cos \alpha)}$$

$$J_x = \frac{\pi R^4}{4}$$

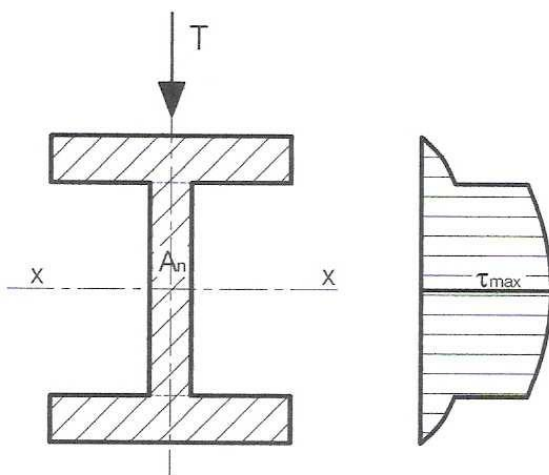
Sostituendo nell'espressione di Jourawsky, dopo una serie di passaggi, si ha:

$$\tau = \frac{2}{3} \frac{T}{\pi \cdot R^2} \frac{\sin^2 \alpha \cdot (2\alpha - \sin 2\alpha)}{3 \cdot (\alpha - \sin \alpha \cos \alpha)}$$

Questo significa che le tensioni tangenziali τ variano parabolicamente lungo l'altezza y dal valore nullo in corrispondenza degli estremi ($\tau = 0$ quando $\alpha = 0$ e $\alpha = \pi$), al valore massimo τ_{max} in mezzeria ($\alpha = \pi/2$) dato

da:
$$\tau_{max} = \frac{4}{3} \frac{T}{\pi \cdot R^2} = \frac{4}{3} \frac{T}{A}$$

Questo significa che, in caso di sezione rettangolare, la tensione massima è i quattro terzi della tensione media ottenuta dividendo la forza di taglio per l'area della sezione.



Infine, nel caso della sezione a doppio T, con buona approssimazione, si può ritenere che la tensione tangenziale massima sia data dal rapporto tra la forza di taglio e l'area A_n della sola anima:

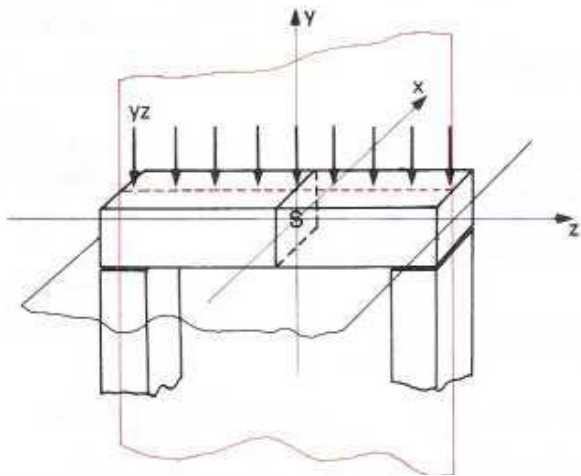
$$\tau_{max} = \frac{T}{A_n}$$

Questo significa che in tutti i problema di VERIFICA, a seconda della forma della sezione, si dovrà porre la condizione $\tau_{max} \leq \tau_{amm}$ dove la tensione ammissibile,

quando non sia esplicitamente data, può essere valutata a partire dalla tensione normale ammissibile con la formula empirica $\tau_{amm} = 0,58 \cdot \sigma_{amm}$

1.4 Flessione

Si dice che un solido è sollecitato a flessione semplice quando è sottoposto ad una sistema di forze esterne (combinazioni di forze e coppie) che tende a farlo ruotare attorno ad un proprio punto provocando

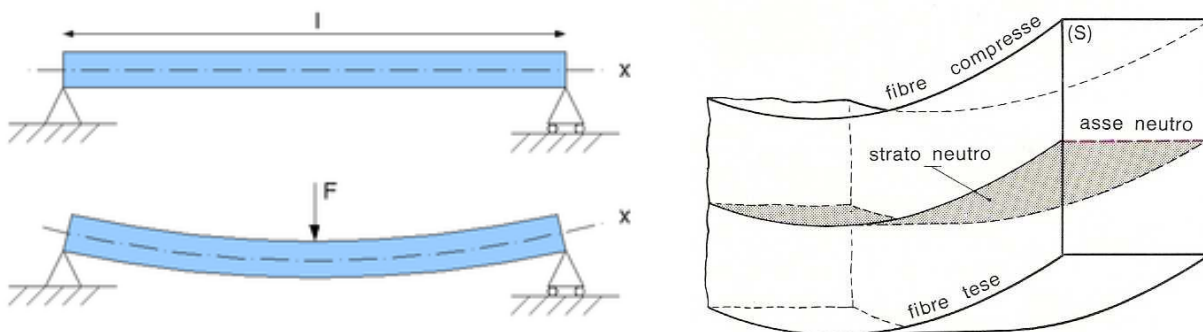


l'incurvamento del suo asse longitudinale. Ad esempio, una trave è sollecitata a flessione quando è sottoposta ad un sistema di carichi che possiede una componente perpendicolare all'asse longitudinale (in fig. l'asse z), che genera un momento flettente, giacente in un piano contenente l'asse longitudinale (detto piano di sollecitazione) che ne provoca l'incurvatura.

Quando il piano di sollecitazione contiene anche un asse di simmetria della sezione (in fig. l'asse y) si parla di **flessione retta**, negli altri casi si parla di **flessione**

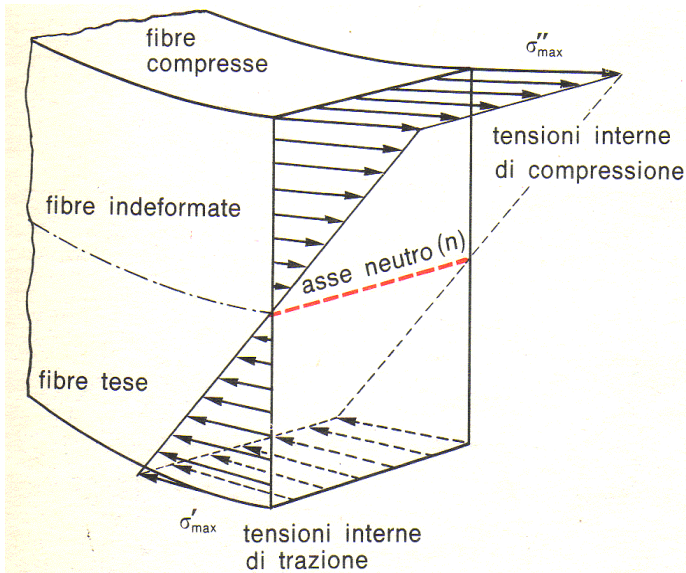
deviata. Tratteremo solo il caso della flessione retta, lasciando il caso della flessione deviata a corsi di maggiore approfondimento.²

Nella trave sottoposta a flessione il tipo di deformazione che subisce la trave è una inflessione ovvero un incurvamento secondo un arco di circonferenza. In seguito ad esso, alcune fibre (quelle sopra l'asse longitudinale) si accorceranno ed altre (quelle sotto l'asse longitudinale) si allungheranno, mentre le fibre appartenenti allo strato comprendente l'asse longitudinale non subiranno né allungamento né accorciamento e pertanto viene definito neutro. L'intersezione tra lo strato neutro ed una qualsiasi sezione della trave viene definito **asse neutro**.



² Nel caso rappresentato in figura oltre alla flessione c'è anche la sollecitazione di taglio ed inoltre il momento flettente risulta variabile lungo la trave. In questo caso quando si dovrà progettare a flessione la trave, occorre considerare il momento flettente massimo salvo verificare a taglio, nei punti più soggetti, la sezione progettata.

Nella trave sottoposta a flessione nascono quindi delle tensioni interne di trazione σ' e compressione σ'' , idealmente separate dallo strato di fibre indeformate (in fig. le fibre sovrastanti risultano compresse quelle sottostanti risultano tese). Questi sforzi assiali σ sono proporzionali alla distanza y della fibra dall'asse neutro e diversamente a quanto avviene per la trazione, in cui tutte le fibre di una sezione sono soggette al medesimo tensione σ , nella flessione esse variano dal valore nullo sull'asse neutro al valore massimo σ_{max}



relativo alla fibra più lontana dall'asse neutro, secondo il classico andamento detto "a farfalla". Si dimostra che in una generica sezione di una trave soggetta a flessione la tensione unitaria, agente sulla fibra posta a distanza y , è data da:

$$\sigma = \frac{M_f \cdot y}{J} \quad \text{oppure} \quad \sigma = \frac{M_f}{W_f} \quad \text{dove:}$$

- σ è la sollecitazione unitaria (N/mm²)
- M_f è il momento flettente (N · mm)
- J è il momento d'inerzia rispetto all'asse neutro (mm⁴)
- $W_f = J/y$ è il modulo di resistenza a flessione

Pertanto ai fini della a verifica a flessione, occorrerà considerare il valore massimo della tensione che si manifesta in corrispondenza delle fibre più lontane dall'asse neutro, e quindi verificare che essa risulti minore di quella ammissibile propria del materiale:

$$\sigma_{max} = \frac{M_f}{W_f} \leq \sigma_{amm}$$

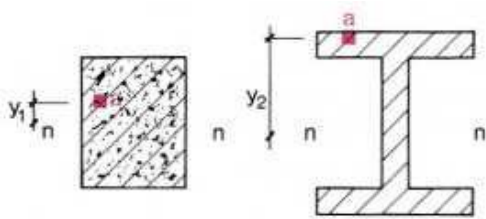
FORMULA per la VERIFICA a FLESSIONE

In maniera analoga, per il progetto e dimensionamento della sezione, ovvero quando è noto il materiale e la sollecitazione e sono incognite le dimensioni della sezione, occorre calcolare il valore minimo del modulo di resistenza a flessione imponendo che risulti :

$$W_{fmin} = \frac{M_f}{\sigma_{amm}}$$

FORMULA per il PROGETTO a FLESSIONE

Infatti il modulo di resistenza a flessione W_f è un parametro legato sia alle dimensioni che alla forma della sezione. Pertanto per la flessione non è importante solo la dimensione della sezione ma anche la sua forma ed, in particolare, il modo in cui il materiale è disposto intorno all'asse neutro. In effetti sezioni addensate



principalmente nelle zone più lontane dell'asse neutro (come quelle a doppio T) hanno, a parità di superficie, un momento d'inerzia più grande, quindi un modulo di resistenza a flessione maggiore, e ciò le rende più adatte a resistere alla flessione rispetto ad una sezione rettangolare di pari area.

Infatti in una sezione a doppio T è come se si fosse spostato del materiale dalla zona in cui le tensioni sono minori a quella in cui sono maggiori. Inoltre, per resistere meglio a flessione, le sezioni delle travi a doppio T sono caratterizzate da una larga piattabanda e una lunga anima, il cui spessore non deve essere eccessivamente ridotto per non andare incontro a problemi con il taglio.

Di seguito si riporta una tabella con le formule per il calcolo dei moduli di resistenza a flessione W_f per alcune delle sezioni che più frequentemente si possono incontrare nei problemi di costruzioni aeronautiche.

	$W_x = W_y = \frac{\pi}{32} d^3 \approx 0,1 \cdot d^3$		$W_x = \frac{BH^3 - bh^3}{6H}$
	$W_x = W_y = \frac{\pi}{32} \frac{D^4 - d^4}{D} = \frac{\pi}{32} D^3 (1 - c^4)$ $c = \frac{d}{D}$		$W_x = \frac{BH^3 - bh^3}{6H}$
	$W_x = \frac{\pi}{32} B \cdot H^3$ $W_y = \frac{\pi}{32} H \cdot B^3$		$W_x = \frac{BH^3 - bh^3}{6H}$
	$W_x = \frac{B \cdot H^2}{6}$ $W_y = \frac{H \cdot B^2}{6}$ con $B = H = L : W = \frac{L^3}{6}$		$W_x = \frac{I_x}{e + \frac{h}{2}}$ $W_y = \frac{HB^3 + hb^3}{6B}$

2.5 Torsione

La **torsione** è quello sforzo cui è sottoposto un corpo solido quando viene sollecitato da due coppie uguali ed opposte giacenti in piani perpendicolari all'asse del corpo. Il momento delle coppie viene detto momento torcente e provoca una rotazione di ogni sezione rispetto a quella adiacente di un certo angolo. A tale deformazioni il corpo si oppone con delle tensioni tangenziali τ giacenti nelle sezioni stesse che tendono ad equilibrare il carico applicato.

Per trovare la relazione che lega le tensioni τ al momento torcente occorre distinguere il caso dei corpi solidi pieni da quelli tubolari, come ad esempio i tubi a pareti sottili, per i quali si applica la teoria di Bredt.

➤ Solidi pieni

Per i solidi pieni la relazione che lega le tensioni τ al momento torcente è molto simile a quella per le σ nella flessione, infatti gli sforzi tangenziali τ sono proporzionali alla distanza r dall'asse neutro (vanno dal valore nullo sull'asse neutro al valore massimo relativo alla fibra più lontana dall'asse neutro) ed inversamente proporzionali al momento di inerzia polare della sezione secondo la legge:

$$\tau = \frac{M_t \cdot r}{J_p} \text{ dove: } \begin{cases} \tau \text{ è la sollecitazione unitaria (N/mm}^2\text{)} \\ M_t \text{ è il momento torcente (N} \cdot \text{mm)} \\ r \text{ è la distanza dall'asse neutro (mm)} \\ J_p \text{ è il momento d'inerzia polare rispetto all'asse neutro (mm}^4\text{)} \end{cases}$$

Pertanto per la verifica a torsione, occorrerà calcolare il valore che la τ assume in corrispondenza della fibra più lontana dall'asse neutro e quindi verificare che essa risulti minore rispetto a quella ammissibile propria del materiale. Dovrà quindi essere $\tau \leq \tau_{amm} = 0,58 \cdot \sigma_{amm}$

Se si definisce **modulo di resistenza a torsione** la quantità $W_t = \frac{J_p}{r}$ la relazione precedente si può anche

scrivere
$$\tau = \frac{M_t}{W_t} \leq \tau_{amm} = 0,58 \cdot \sigma_{amm}$$

➤ Tubi a pareti sottili (Teoria di BREDT)

Per i solidi tubolari aventi pareti sottili si applica la teoria di Bredt nella quale lo sforzo tangenziale τ è dato dal rapporto da una quantità q detta **flusso di taglio** (N/mm) e lo spessore t della lamiera. Tale flusso per le ipotesi della teoria di Bredt si ritiene costante lungo la parete sottile quando questa è soggetta a torsione

e pertanto se si indica con A l'area racchiusa dalla sezione si può scrivere

$$M_t = 2Aq \text{ e quindi } q = \frac{M_t}{2 \cdot A}$$

$$\tau = \frac{q}{t} = \frac{M_t}{2 \cdot A \cdot t} \leq \tau_{amm} = 0,58 \cdot \sigma_{amm}$$

Per le strutture aeronautiche diventa particolarmente importante valutare anche la **rigidezza torsionale** B e quindi l'angolo di torsione poiché anche ad una piccola deformazione torsionale corrisponde sempre una variazione delle forze aerodinamiche agenti a causa della variazione dell'angolo di incidenza.

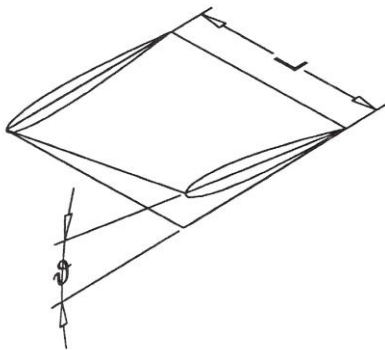
La rigidezza torsionale B si calcola con l'espressione:

$$B = \frac{4 \cdot G \cdot A^2}{c/t} \text{ dove: } \begin{cases} B \text{ è la rigidezza torsionale (N} \cdot \text{mm}^2) \\ A \text{ area della sezione (mm}^2) \\ G \text{ è il modulo di elasticità trasversale del materiale (N/mm}^2) \\ c \text{ è il perimetro della sezione A (mm) \\ t \text{ è lo spessore della lamiera (mm)} \end{cases}$$

in particolare nel caso che il tubo sia formato da lamiere di spessore differente l'espressione c/t, posta a denominatore, viene sostituita dalla sommatoria $\sum \frac{c_i}{t_i}$.

Una volta nota la rigidezza torsionale, occorre calcolare **l'angolo di torsione massimo** di un tubo lungo L e di rigidezza B che (in radianti) si ottiene dalla formula:

$$\Delta\theta = \frac{M_t \cdot L}{B}$$



In particolare nel caso di un'ala l'angolo di torsione rappresenta la di rotazione dell'estremità rispetto alla radice e non deve essere troppo elevato (i regolamenti in genere assegnano un valore non superiore a 4°). Infatti un valore troppo alto rischierebbe di aumentare troppo l'angolo di incidenza con conseguente variazione delle forze aerodinamiche agenti. In tal caso bisogna necessariamente aumentare la rigidezza torsionale B

andando ad aumentare lo spessore del lamiera del bordo d'attacco.